Zusammenfassung: Didaktik der Bruchrechnung

nach F. Padberg, 2. Auflage 1995

Inhaltsverzeichnis

1 Gemeine Brüche und Dezimalbrüche im Unterricht

Begründungen:
- Nötig zur Lösung praktischer Probleme des täglichen Lebens (u.a. Prozent-/Zinsrechnung).
- Wichtig aus innermathematischen Gründen.

Gemeine Brüche contra Dezimalbrüche:
- GB leichter handhabbar (z.B. $\frac{3}{8}$ statt 0,375);
- DB meist unendliche, periodische Brüche – unpraktisch, schwer vorstellbar;
- GB leichter zu multiplizieren und dividieren;
- DB dafür in realem Leben weiter verbreitet;
- DB leichter bzgl. Größe vergleichbar;
- DB leichter zu addieren und subtrahieren.

2 Konzepte zur Einführung der Bruchrechnung

Größenkonzept: Ausgangspunkt sind den Schülern bekannte Brüche ($\frac{3}{4}$ km o.ä.), Abstraktion hin zu $\frac{m}{n}$ E (Einheiten), was allerdings bei Multiplikation zu Problemen führen kann ($\frac{1}{2}$ Torte $\cdot$ $\frac{1}{3}$ Torte =?), hier muss man den Sprung zur Redeweise $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$; alles in allem heutzutage der Standardzugang.

Äquivalenzklassenkonzept: Völlig unrealistisch mangels Möglichkeit zu Motivation, Anknüpfung an Vorwissen, etc.

Gleichungskonzept: $\frac{m}{n}$ als Lösung von $nx = m$; aber auch wenig geeignet, da zu dieser Zeit notwendige Kenntnisse der Gleichungslehre fehlen, zu formal, wenig direkte Anwendungsmöglichkeiten, etc.

Operatorkonzept: Beliebt seit 70er Jahre, mittlerweile wieder verdrängt. Bruch $\frac{m}{n}$ als Verknüpfung der Operatoren $(\cdot m) \circ (: n)$, Einführung von Regeln für Operatoren (z.B. $(\cdot 6) \circ (: 8) = (\cdot 3) \circ (\cdot 2) \circ (: 2) \circ (: 4) = (\cdot 3) \circ (: 4)$) u.ä. Neben ähnlichen Nachteilen wie bei zwei vorigen Punkten und hohem Zeitaufwand letztlich kein größerer Lernerfolg.

3 Bruchrechnung

3.1 Einführung der Bruchzahlen

- Erster Kontakt über Maßzahlen, Relationen, Skalenwert etc.
- Einfache Vorstellung durch Streckenabschnitte, Flächenanteile, Falten von Papier, Aufteilen von Pizzas, etc.
- Nach diesem „Existenzbeweis“ dann Frage nach Darstellung, Benennung dieser Größen, Diskussion der Vieldeutigkeit $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \ldots$ (kann durch feinere Rasterung/Faltung einer Fläche erläutert werden, bei der sich am markierten Anteil nichts ändert), schließlich eben Brüche als Namen der Bruchzahlen.
- Einbettung der natürlichen Zahlen!

3.2 Erweitern/Kürzen

- Erweiterung als Verfeinerung der internen Unterteilung, die ja nichts an schraffierter Fläche o.ä. ändert.
- Einfache Motivation können dabei Größenvergleiche sein.
- Zu Beginn kann man die „Erweiterungszahlen“ noch notieren: $\frac{3}{5} \overset{4}{=} \frac{12}{20}$.
- Problematischer ist Kürzen, erstens schwerer handhabbar (als Vergröberung), und fundamentaler Unterschied:
  Erweitern geht immer, Kürzen eben nicht!
- Kürzen motiviert durch Vereinfachen, Vergleich zweier Brüche auf Gleichheit. Auch wieder „Kürzungszahlen“: $\frac{3}{5} \underset{4}{=} \frac{12}{20}$.
- Wichtig bei beiden: Schülern muss bewusst werden, dass beide nichts an der Bruchzahl ändern, diese lediglich einen anderen Namen bekommt.

Typische Fehler:

- Relativ gute Erfolgsquoten, Fehler nur bei Einbettung der natürlichen Zahlen, oder nach Kenntnis weiterer Operationen z.B. Erweitern durch beid„seitiges“ Addieren.
- Manchmal auch einfach Vergessen am Ende einer Rechenaufgabe.

3.3 Kleinerrelation

- Großes Problem: Viele Spezialregeln: Bei gleichen Zählern ist die Zahl mit größerem Nenner kleiner, bei gleichen Nennern jedoch die mit kleinerem Zähler, Einbettung der natürlichen Zahlen noch problematischer.
- Vergleich zweier Brüche mit gleichem Zähler häufigste Fehlersituation.
- Universalregel ist dabei der Vergleich gleichnamiger Brüche, doch Bildung des Hauptnenners oft aufwendig, häufig Fehler bei Primfaktorzerlegung.

- Nach einer Weile kann dann auch der Zahlenstrahl betrachtet werden, insbesondere im Hinblick darauf, wo zwischen den natürlichen Zahlen die Bruchzahlen eingeordnet werden.
- Bei guten Klassen könne man sogar das Cantorsche Diagonalverfahren vorführen und Fragen stellen wie „Die nächste natürliche Zahl nach 0 ist die 1, aber was ist denn die nächste Bruchzahl?“.

3.4 Addition/Subtraktion

- Einführung der Addition gleichnamiger Brüche noch leicht, „1 Fünftel plus 2 Fünftel ...“.
- Problem ungleichnamiger Brüche zu Beginn z.B. bei Strecken, man erkennt, dass gleiche Unterteilung gefunden werden sollte. Übertragung auch auf Flächen (z.B. Papier mit 3x4 Rastern, man überlegt, was $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ ergibt o.ä.
- Schließlich Notwendigkeit des Gleichnamigmachens erkannt, dann aus Arbeitsökonomie möglichst grobe Unterteilung, also Hauptnenner.
- Bei der Addition ist u.U. auch die gemischte bruchschreibweise hilfreich.

Typische Fehler:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, insbesondere nach Einführung der Multiplikation.
- $n + \frac{a}{b} = \frac{n+a}{b}$; häufig wird dieser Typ im Unterricht vernachlässigt, da der Lehrer die Schwierigkeit für Schüler nicht erkennt. Häufung ebenfalls nach Multiplikation.
- Deshalb wichtig, dass der Lehrer nach Einführung der Multiplikation immer wieder die Unterschiede der Regeln hervorhebt!

3.5 Multiplikation

- 1. Fall: Natürliche Zahl mal Bruchzahl, Regel noch relativ einsichtig (3 mal 1 „Fünftel“ ist...).
- 2. Fall: Bruchzahl mal natürliche Zahl: Schon problematischer, man muss Kommutativität fordern („gilt ja bei $\mathbb{N}$ auch...“), dann wie 1. Fall. Problem dabei: Schüler denken dann, KG gilt immer und überall...
  Darum sollte man besser die „von“-Sprechweise einführen, was dann (mit grafischen Erläuterungen) auf die gleiche Rechenregel führt, und auch KG ergibt. Alternativ auch Sachaufgaben (1 kg kostet 8 Euro, also kostet $\frac{1}{2}kg$ ...).
- 3. Fall: Bruchzahl mal Bruchzahl: Wichtig schon mal, dass irgendwann die zwei vorigen Fälle hier explizit integriert werden müssen.
  - Der „von“-Ansatz führt zwar zur richtigen Regel, nur ist halt nicht ganz offensichtlich, dass „mal“ gleich „von“ ist. Dafür vom Anwendungsgesichtspunkt her zu empfehlen.
  - Deshalb kann man auch *Gleichungsketten* verwenden:

$$\begin{array}{cccc} \frac{3}{7} & \cdot & 50 & = & \frac{150}{7} \\ \frac{3}{7} & \cdot & 10 & = & \frac{30}{7} \\ \frac{3}{7} & \cdot & 2 & = & \frac{6}{7} \\ \hline \frac{3}{7} & \cdot & \frac{2}{5} & = & ??? \end{array}$$

  Dabei wird von Schritt zu Schritt der zweite Faktor durch 5 dividiert, und an Hand des jeweiligen Resultats sollen die Schüler schließlich das Ergebnis erraten. Dieser Weg soll recht erfolgreich sein, aber halt sehr formal.

  - Auch mittels Betrachtung von Flächeninhalten kann man die Regel einführen, indem man auf die Formel für den Flächeninhalt eines solchen zurückgreift. Auch grafisch gut zu veranschaulichen (wieder markierte Kästchen zählen), allerdings manchmal Probleme, wenn eine Länge natürlich ist. Anwendungsbezug fehlt auch hier.

- In jedem Fall sollten gemischte Brüche vor der Multiplikation stets umgewandelt werden!

Typische Fehler:

- Multiplikation gleichnamiger Brüche als $\frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{n}$, manchmal auch Addition der Nenner und Mult. der Zähler.
- Multiplikation ungleichnamiger Brüche dagegen erstaunlich zuverlässig.
- Größte Probleme, wenn ein Faktor natürlich, am beliebtesten: $n \cdot \frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$.
- Wichtig also wieder explizite Absetzung zu Addition und gründliche Einbettung von $\mathbb{N}$.

3.6 Division

- Bruchzahl durch natürliche Zahl noch plausibel, aber dann wird es haarig. Division durch Bruchzahl als „eines der schwierigsten Gebiete dieser Jahrgangsstufe“. Deshalb ist sorgfältige Regelableitung äußerst wichtig!
- Mögliche Wege:
  - Messen: Gegeben ist Strecke gewisser Länge, auf der gegebener Maßstab abgetragen wird. Verdoppeln wir nun die Strecke, aber auch den Maßstab, dann müssen wir ihn genauso oft wie vorher abtragen: $a : b \; = \; (a \cdot n) : (b \cdot n)$, also dann auch $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = (\frac{a}{b} \cdot d) : (\frac{c}{d} \cdot d) = (\frac{ad}{b}) : (c) = \frac{ad}{bc}$.
    Einzig halbwegs anschaulicher und anwendungsbezogener Weg.
  - Gleichungsketten analog oben:

$$\begin{array}{cccc} \frac{3}{2} & : & 50 & = & \frac{3}{100} \\ \frac{3}{2} & : & 10 & = & \frac{3}{20} \\ \frac{3}{2} & : & 2 & = & \frac{3}{4} \\ \hline \frac{3}{2} & : & \frac{2}{5} & = & ??? \end{array}$$

    Hier wohl der zuverlässigste Weg, allerdings wird kein grundlegendes Verständnis vermittelt.
  - Per Gleichung/Umkehroperation: $x \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{4}$, also $x = ?$. Problem sind halt wieder die fehlenden Kenntnisse der Gleichungslehre.
  - Division als Doppelbruch, dann mit Kehrbruch der Nenners erweitern, 1 weg, fertig. Wohl der fehlerträchtigste Weg.

Typische Fehler:

- Bei Bruchzahl durch Bruchzahl gleichnamiger Brüche ist „Dividiere nur Zähler durch Zähler“ beliebt.
- Bei Bruchzahl durch natürliche Zahl wird erstaunlich oft multipliziert, wahrscheinlich wegen Fehler bei Kehrwertbildung, bei umgekehrter Operation gerne $n : \frac{a}{b} = \frac{n:a}{b}$.
- Interessanterweise wird natürliche Zahl durch natürliche Zahl sehr oft falsch gelöst!

3.7 Resultat

- Gemischte Fälle besonders fehleranfällig.
- Saubere Regelerarbeitung dringend notwendig.
- Nach Einführung der zweiten „großen“ Operation (meist erst Addition, dann Multiplikation) unbedingt Unterschiede hervorheben.

4 Dezimalbruchrechnung

4.1 Einführung

- Gut einführbar, da Schülern aus Realität bekannt.
- Von vornherein auf richtige Sprechweise achten, 3,45 ist nicht 3 Komma Fünfundvierzig, führt zu enormen Problem bei Größenvergleichen ($3{,}45 < 3{,}238$, da $45<238$)!
- Schwierig ist häufig der gegenseitige Übertrag: $\frac{2}{1000}$ – wieviele Nullen zwischen Komma und 2? Häufig wird auch einfach der Bruchstrich durch das Komma ersetzt.
- Erweitern/Kürzen unproblematisch, da ja nur Anhängen/Streichen von Endnullen.
- Beim Runden ist zu betonen, dass man nicht schrittweise rundet.
- Addition sehr unproblematisch, einzig typischer Fehler: „Komma trennt“, d.h. addiere alles vor dem Komma und addiere alles nach dem Komma.

4.2 Multiplikation/Division

- Riesenproblem sind die Kommasetzungsregeln, deshalb sollte den Schülern das Überschlagsrechnen vertraut gemacht werden, damit sie die Fehler selbst erkennen.
- Dazu kommen noch die Fehler der gewöhnlichen Mult./Div. bei natürlichen Zahlen.